

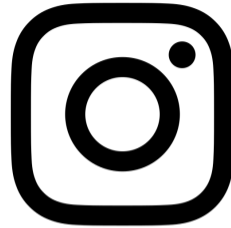
Festvortrag bei der Landesrunde der 63. MO in Bayern

Prof. Dr. Georg Loho

FU Berlin & U Twente

Würzburg, 25. Februar 2024

Was haben diese Sachen gemeinsam?



631233

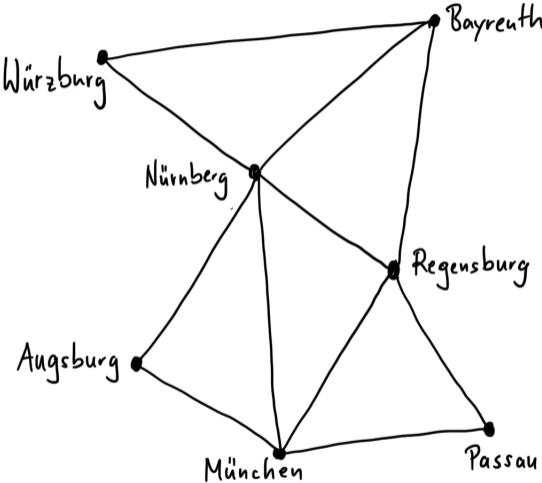
Der Kleinstaat Ökovanien gilt als Wirtschaftsparadies. Das Bankwesen ist dort sehr einfach organisiert: Banken können einander Kredite gewähren. Sobald jedoch eine Bank zahlungsunfähig wird, sind keine neuen Kredite mehr erlaubt. Wird eine Bank b in einem Quartal zahlungsunfähig, so hat das außerdem zur Folge, dass im folgenden Quartal alle Banken zahlungsunfähig werden, die b einen Kredit gewährt haben, unabhängig davon, ob sie selbst bei b einen Kredit aufgenommen haben oder nicht.

Unter einem Bankensystem wird eine endliche Menge B von Banken mit ihren untereinander gewährten Krediten verstanden. Eine Teilmenge R der Menge B heiße *relevant* für das Bankensystem, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

- (1) Zwischen Banken aus R bestehen keine Kredite.
- (2) Werden alle Banken aus R gleichzeitig zahlungsunfähig, so sind am Ende des übernächsten Quartals alle Banken aus B zahlungsunfähig.

Man entscheide, ob in einem Bankensystem mit $n \geq 1$ Banken immer eine für das Bankensystem relevante Teilmenge R existiert.

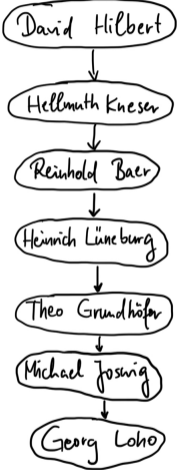
Abstraktion von Zugverbindungen



Soziale Netzwerke



Martin Grandjean, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

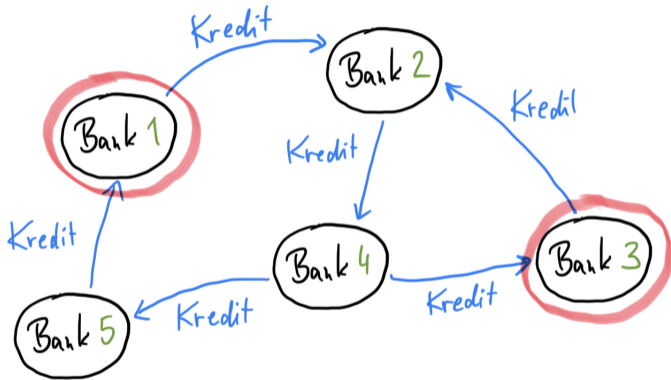


Mathematics Genealogy Project

- ▶ Banken können sich Kredite geben.
- ▶ Wenn eine Bank zahlungsunfähig ist, sind die Kredit gebenden Banken im nächsten Quartal zahlungsunfähig.
- ▶ Gesucht: *Relevante* Menge von Banken

Menge R heißt relevant:

- ▶ Zwischen Banken aus R bestehen keine Kredite.
- ▶ Werden alle Banken aus R gleichzeitig zahlungsunfähig, so sind am Ende des übernächsten Quartals alle Banken zahlungsunfähig.



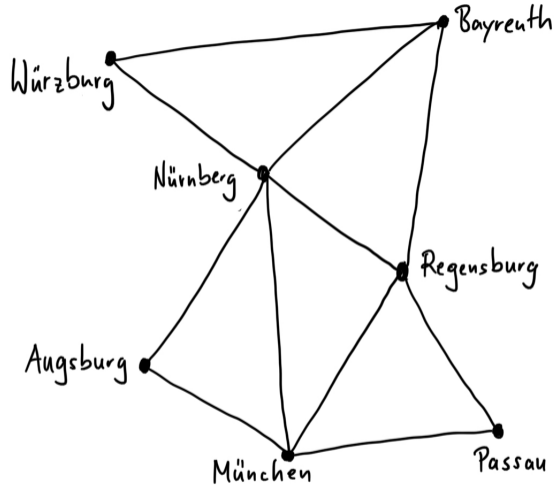
Terminologie

Grundmenge von **Knoten** V

Kanten:

- ▶ **ungerichtet:** 2-elementige Teilmengen von V
- ▶ **gerichtet:** Paare von Elementen von V

Weg: Folge von Knoten, in der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.



Knoten: $\{A, B, M, N, P, R, W\}$

Kanten: $\{A, M\}, \{A, N\}, \{B, N\}, \{B, R\}, \{B, W\}, \{M, N\},$
 $\{M, R\}, \{M, P\}, \{N, R\}, \{N, W\}, \{P, R\}$

Beispiel Weg: M, R, N, W

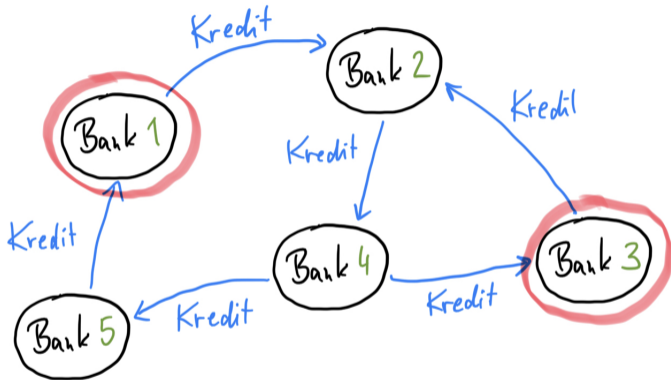
Terminologie

Grundmenge von **Knoten** V

Kanten:

- ▶ ungerichtet: 2-elementige Teilmengen von V
- ▶ **gerichtet:** Paare von Elementen von V

Weg: Folge von Knoten, in der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.

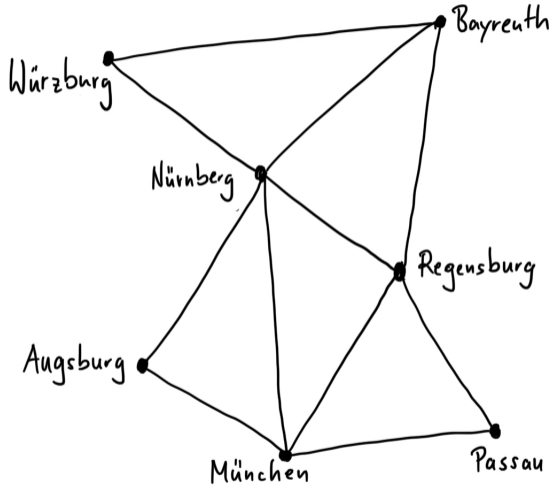


Knoten: $\{B1, B2, B3, B4, B5\}$

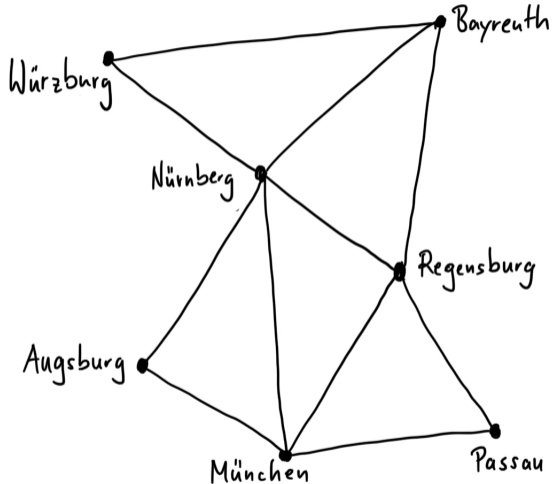
Kanten: $\{B1, B2\}, \{B2, B4\}, \{B3, B2\}, \{B4, B3\}, \{B4, B5\}, \{B5, B1\}$

Beispiel Weg: $B4, B5, B1$

Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?



Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

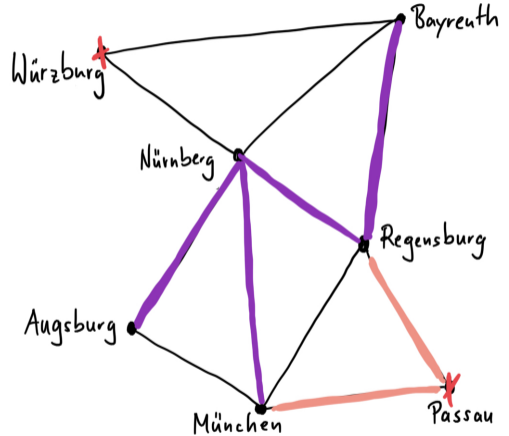
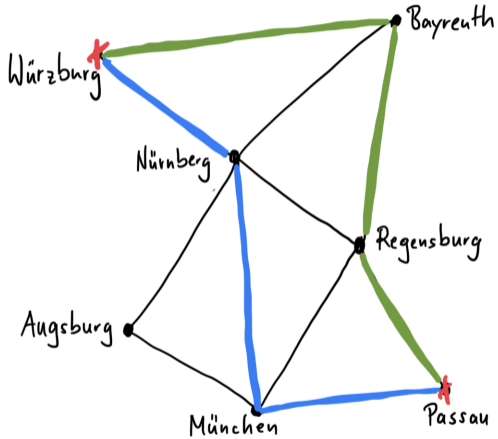


Möglichkeit:

Seien s, t zwei Knoten.

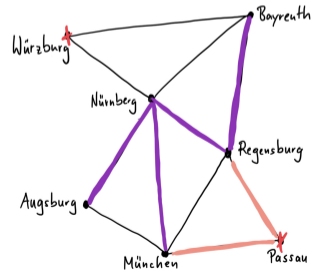
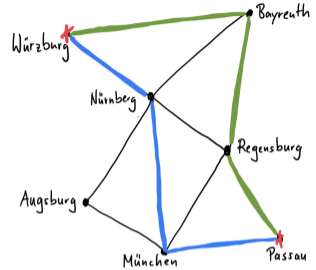
- ▶ **disjunkten Wege:** keine Kante gemeinsam
- ▶ **s - t -trennende Kantenmenge C :** Jeder Weg von s nach t enthält eine Kante aus C .

Disjunkte Wege und trennende Kantenmengen



Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

- ▶ Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten
- ▶ Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge

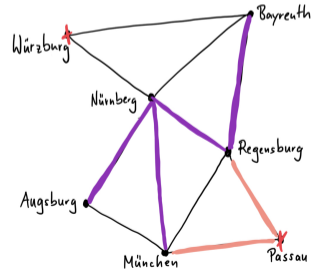
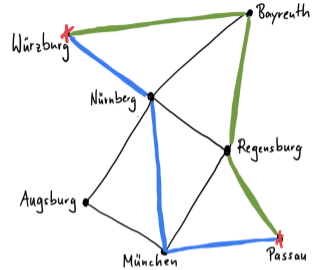


Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

- ▶ Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten
- ▶ Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge

Satz von Menger

Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten =
Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge



Noch mehr Realität

In Realität:

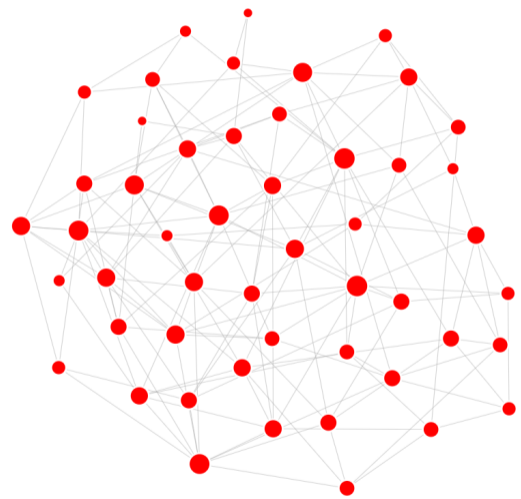
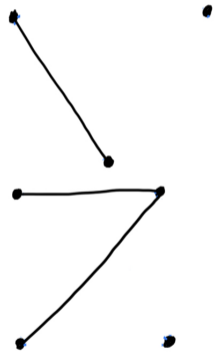
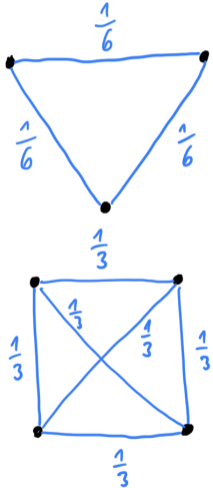
- ▶ Kosten auf den Kanten
- ▶ Kapazitäten auf den Kanten
- ▶ Kanten können nicht immer genutzt werden
- ▶ ...



Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

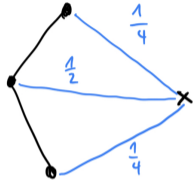
Erdős-Rényi-Gilbert-Modell: Jede Kante kommt mit einer festen Wahrscheinlichkeit vor.



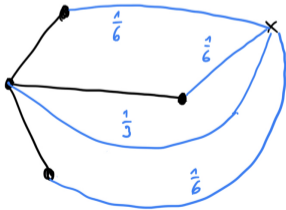
Beobachtung: Alle Knoten haben etwa gleich viele Nachbarn.

Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

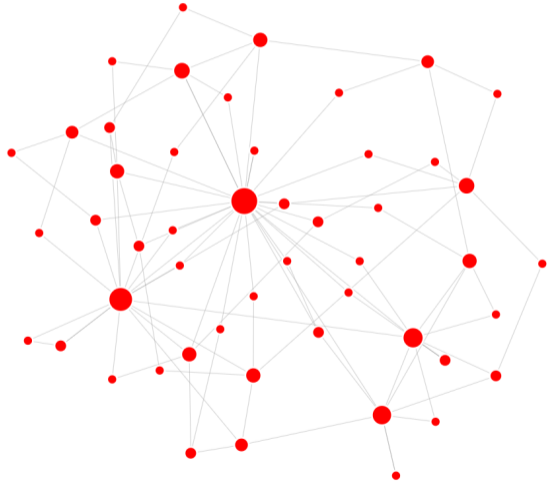
Barabási-Albert-Modell: Start mit "kleinem" Graph, dann jeweils neuer Knoten wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{k_i}{\sum_j k_j}$ mit Knoten i verbunden (k_i Anzahl der Nachbarn von i).



$$4 = 1 + 2 + 1$$

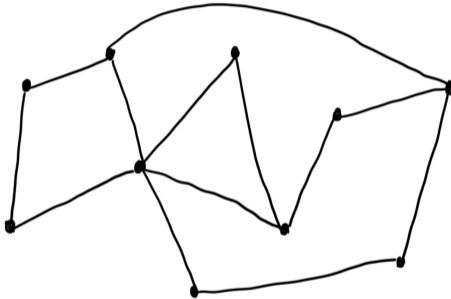


$$6 = 1 + 3 + 1 + 1$$



Überzeugungsmodell

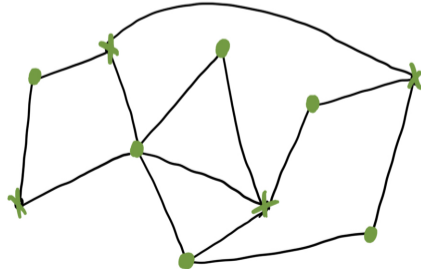
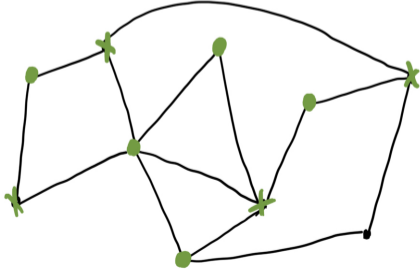
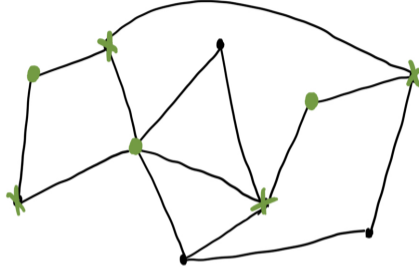
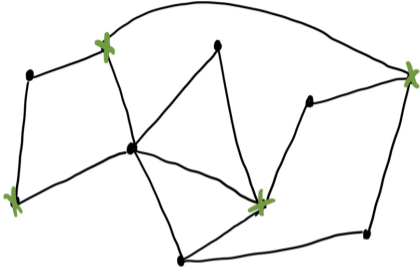
Gegeben (sozialer) Graph



Idee: Wenn τ meiner Nachbarn überzeugt sind, dann werde auch ich überzeugt.

Überzeugungsmodell

Für $\tau = 2$



Zusammenfassung und Ausblick

- ▶ Weiterführung des Modells: wie viele Individuen müssen überzeugt sein, um eine Mehrheit zu überzeugen?

Zusammenfassung und Ausblick

- ▶ Weiterführung des Modells: wie viele Individuen müssen überzeugt sein, um eine Mehrheit zu überzeugen?
- ▶ Gesellschaftliche Herausforderungen mit Mathematik verstehen und lösen: robuste Logistik, soziale Strukturen, ...



- ▶ Mathematik nutzen für Nachhaltigkeit und Demokratie!