

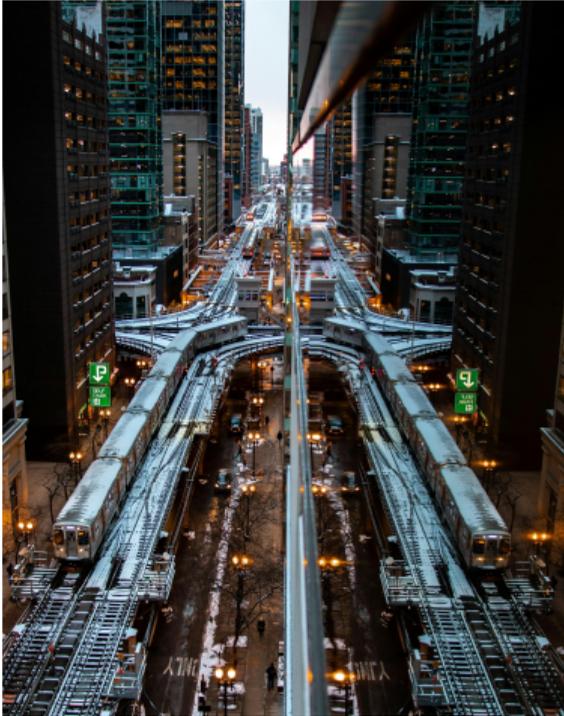
# Festvortrag bei der Landesrunde der 63. MO in Bayern

Prof. Dr. Georg Loho

FU Berlin & U Twente

Würzburg, 25. Februar 2024

## Was haben diese Sachen gemeinsam?



631233

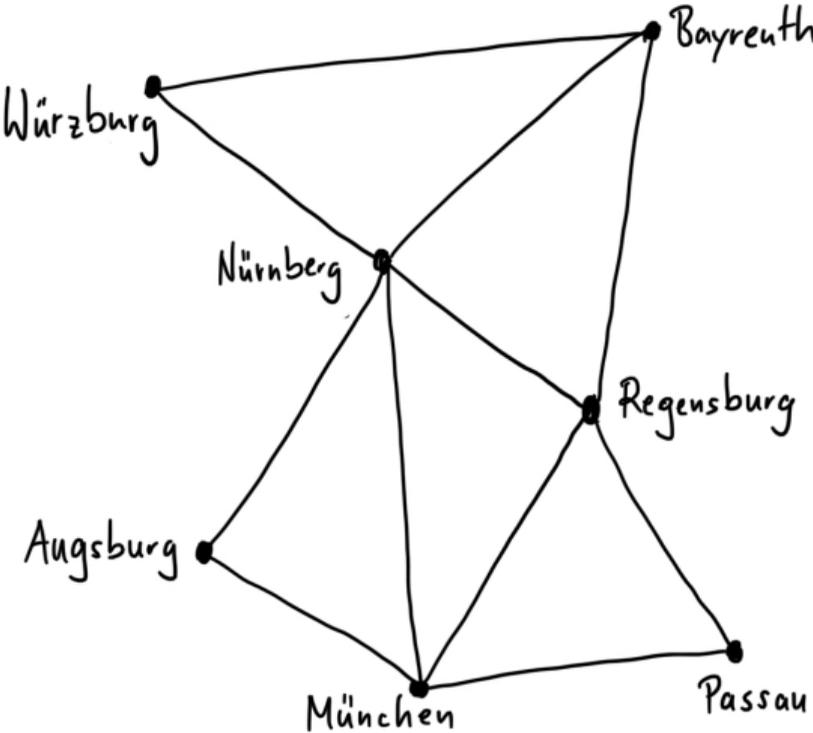
Der Kleinstaat Ökovanien gilt als Wirtschaftsparadies. Das Bankwesen ist dort sehr einfach organisiert: Banken können einander Kredite gewähren. Sobald jedoch eine Bank zahlungsunfähig wird, sind keine neuen Kredite mehr erlaubt. Wird eine Bank  $b$  in einem Quartal zahlungsunfähig, so hat das außerdem zur Folge, dass im folgenden Quartal alle Banken zahlungsunfähig werden, die  $b$  einen Kredit gewährt haben, unabhängig davon, ob sie selbst bei  $b$  einen Kredit aufgenommen haben oder nicht.

Unter einem Bankensystem wird eine endliche Menge  $B$  von Banken mit ihren untereinander gewährten Krediten verstanden. Eine Teilmenge  $R$  der Menge  $B$  heiße *relevant* für das Bankensystem, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

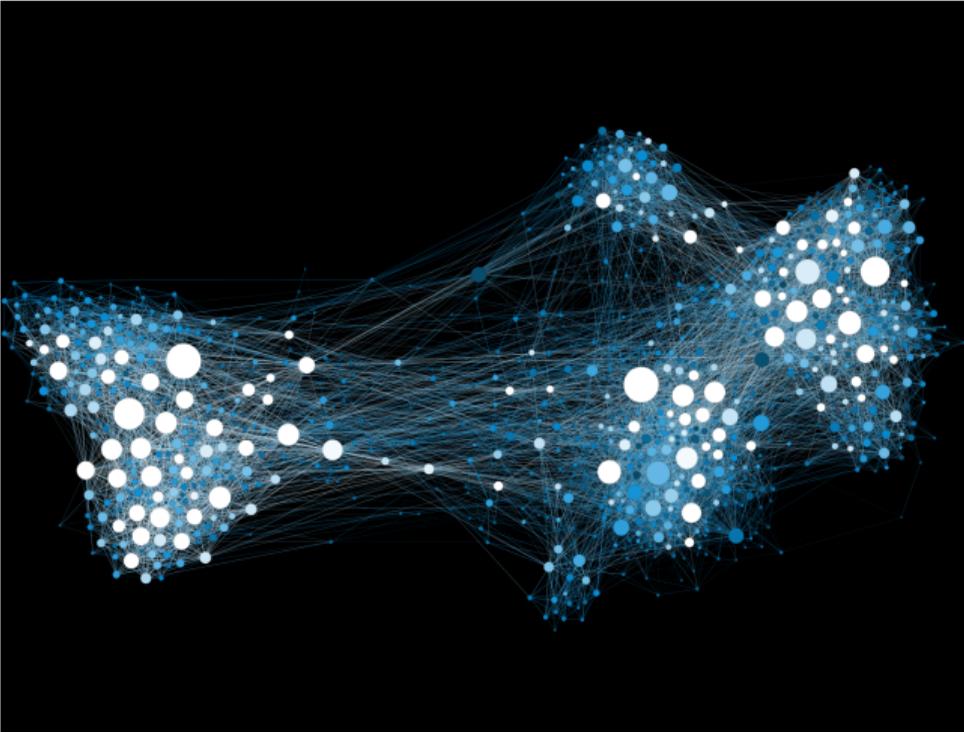
- (1) Zwischen Banken aus  $R$  bestehen keine Kredite.
- (2) Werden alle Banken aus  $R$  gleichzeitig zahlungsunfähig, so sind am Ende des übernächsten Quartals alle Banken aus  $B$  zahlungsunfähig.

Man entscheide, ob in einem Bankensystem mit  $n \geq 1$  Banken immer eine für das Bankensystem relevante Teilmenge  $R$  existiert.

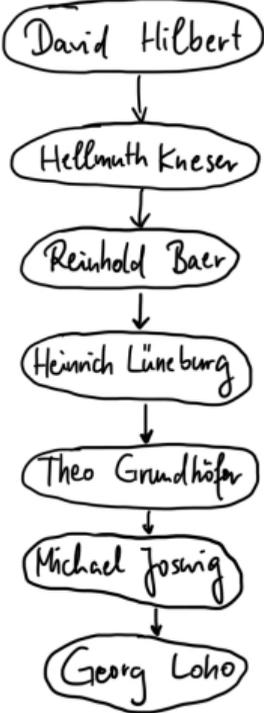
# Abstraktion von Zugverbindungen



# Soziale Netzwerke



Martin Grandjean, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

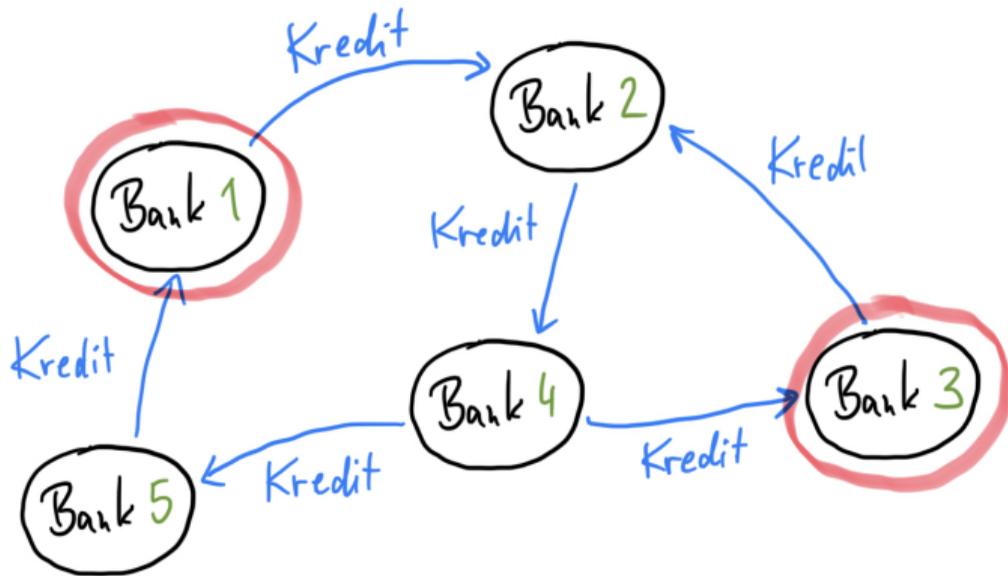


Mathematics Genealogy Project

- ▶ Banken können sich Kredite geben.
- ▶ Wenn eine Bank zahlungsunfähig ist, sind die Kredit gebenden Banken im nächsten Quartal zahlungsunfähig.
- ▶ Gesucht: *Relevante* Menge von Banken

Menge  $R$  heißt relevant:

- ▶ Zwischen Banken aus  $R$  bestehen keine Kredite.
- ▶ Werden alle Banken aus  $R$  gleichzeitig zahlungsunfähig, so sind am Ende des übernächsten Quartals alle Banken zahlungsunfähig.



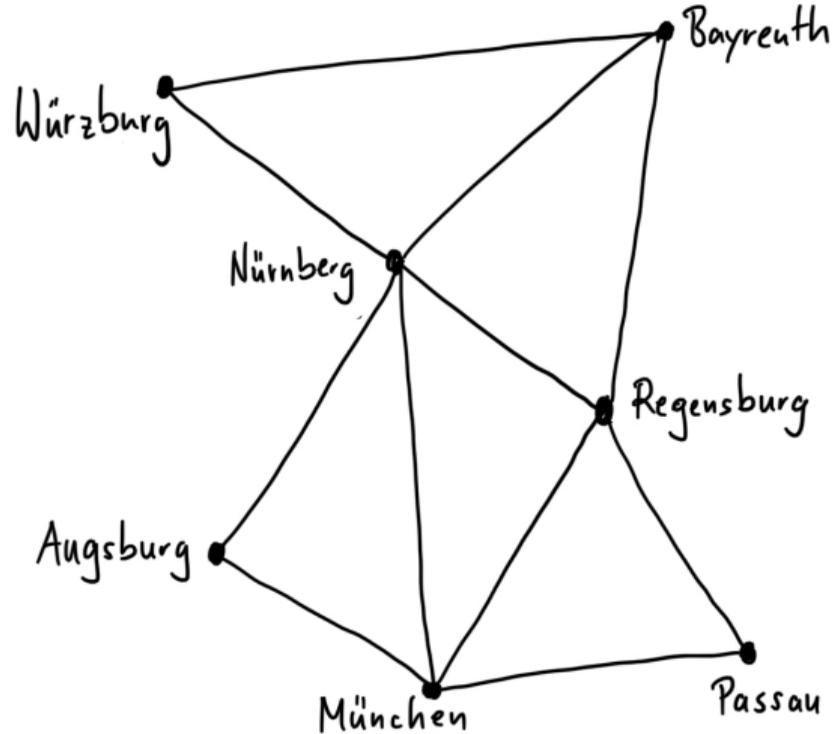
# Terminologie

Grundmenge von **Knoten**  $V$

**Kanten:**

- ▶ **ungerichtet:** 2-elementige Teilmengen von  $V$
- ▶ **gerichtet:** Paare von Elementen von  $V$

**Weg:** Folge von Knoten, in der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.



Knoten:  $\{A, B, M, N, P, R, W\}$

Kanten:  $\{A, M\}, \{A, N\}, \{B, N\}, \{B, R\}, \{B, W\}, \{M, N\},$   
 $\{M, R\}, \{M, P\}, \{N, R\}, \{N, W\}, \{P, R\}$

Beispiel Weg:  $M, R, N, W$

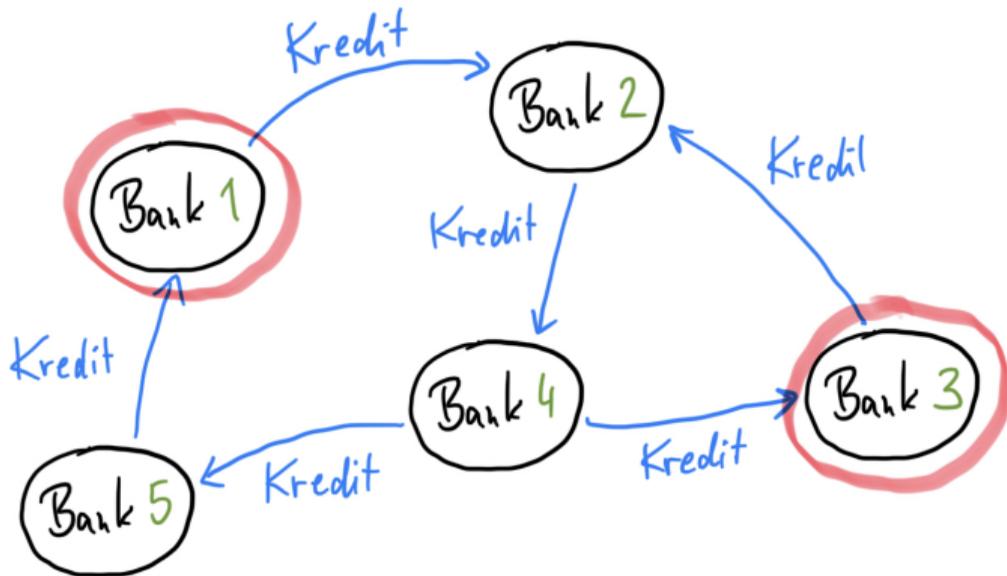
# Terminologie

Grundmenge von **Knoten**  $V$

**Kanten:**

- ▶ ungerichtet: 2-elementige Teilmengen von  $V$
- ▶ **gerichtet:** Paare von Elementen von  $V$

**Weg:** Folge von Knoten, in der aufeinanderfolgende Knoten durch eine Kante verbunden sind.

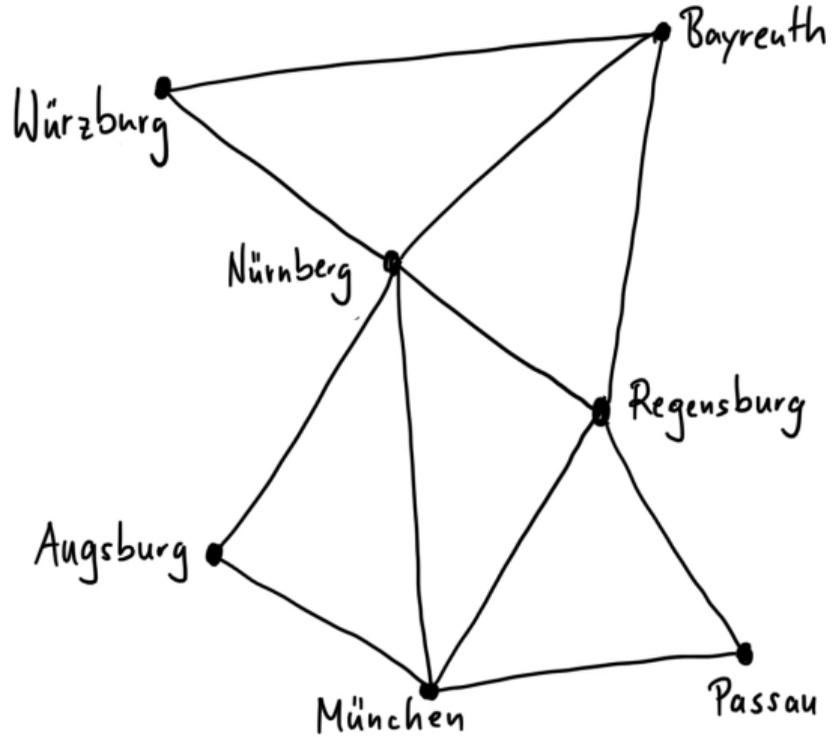


Knoten:  $\{B1, B2, B3, B4, B5\}$

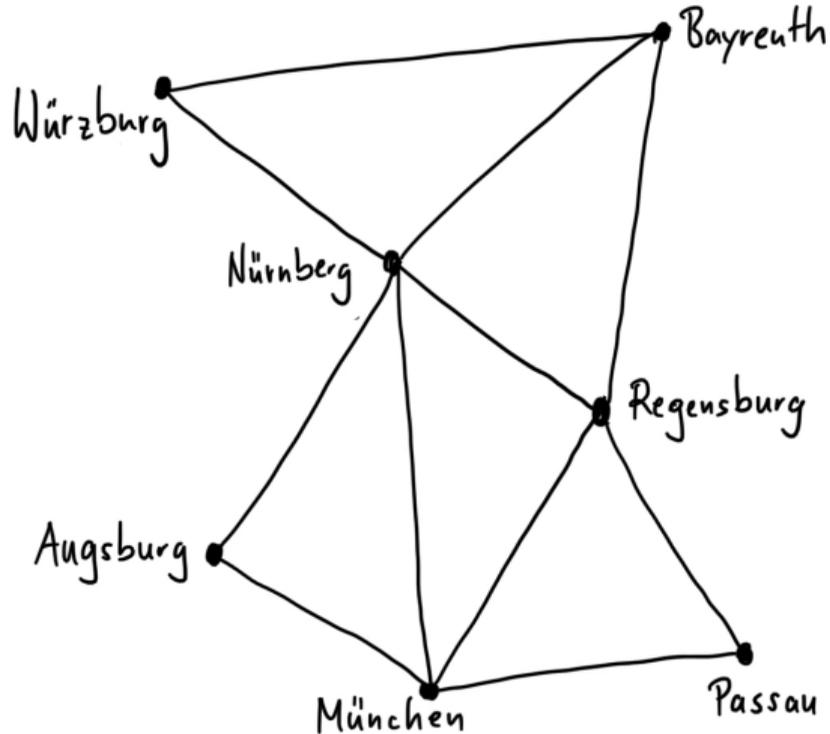
Kanten:  $\{B1, B2\}, \{B2, B4\}, \{B3, B2\}, \{B4, B3\}, \{B4, B5\}, \{B5, B1\}$

Beispiel Weg:  $B4, B5, B1$

Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?



## Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

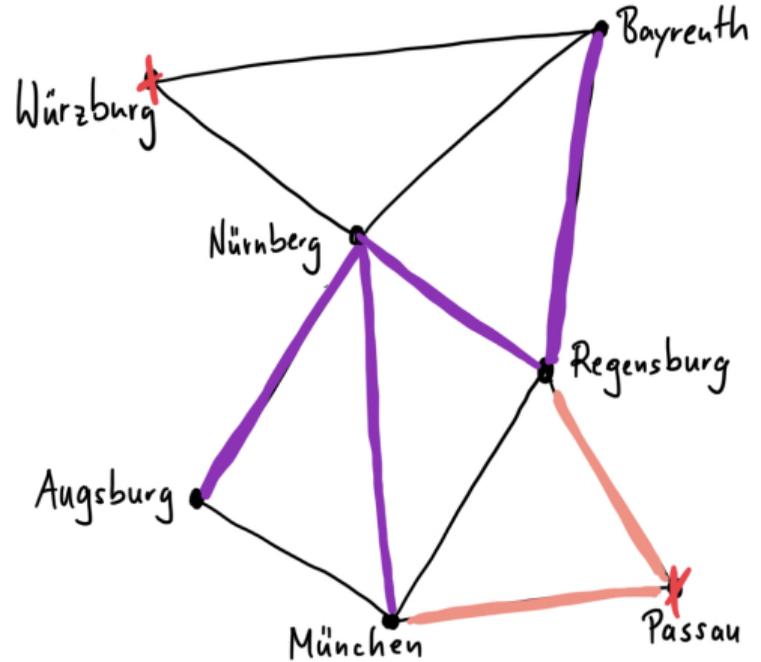
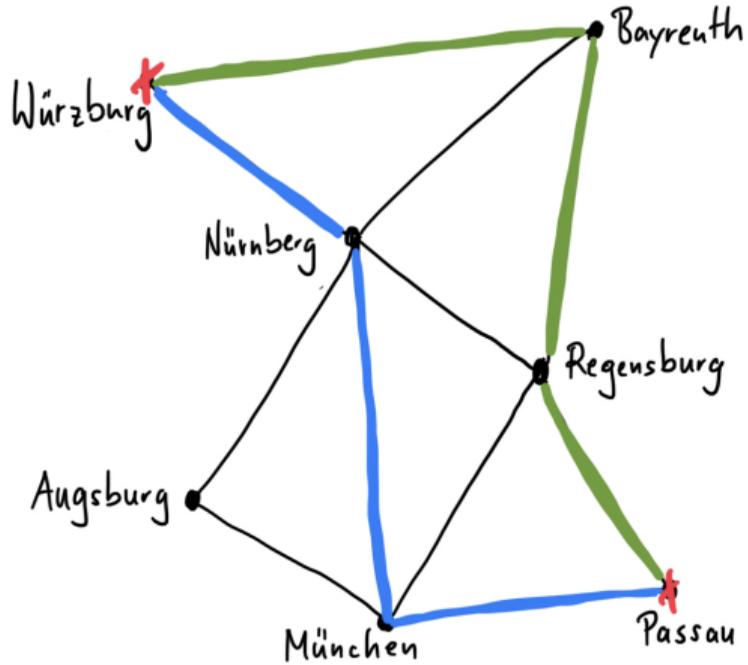


Möglichkeit:

Seien  $s, t$  zwei Knoten.

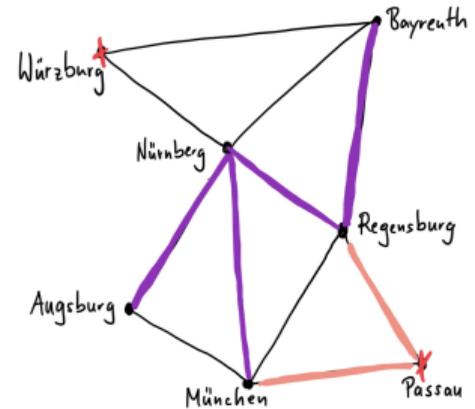
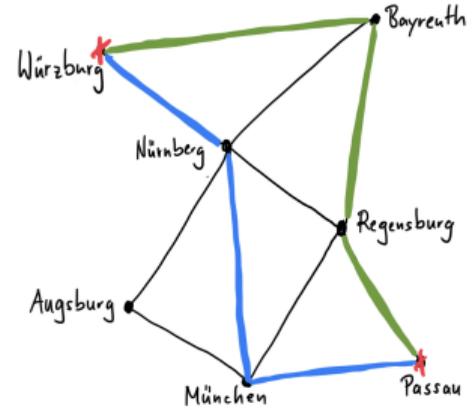
- ▶ **disjunkten Wege:** keine Kante gemeinsam
- ▶  **$s$ - $t$ -trennende Kantenmenge  $C$ :** Jeder Weg von  $s$  nach  $t$  enthält eine Kante aus  $C$ .

## Disjunkte Wege und trennende Kantenmengen



# Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

- ▶ Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten
- ▶ Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge

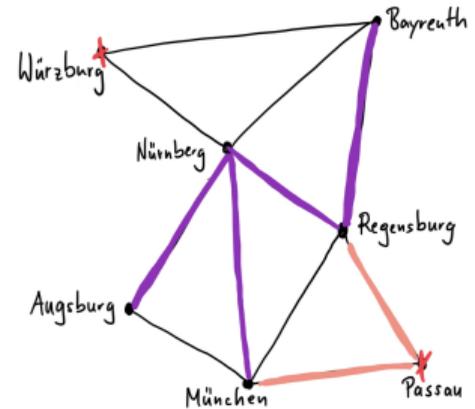
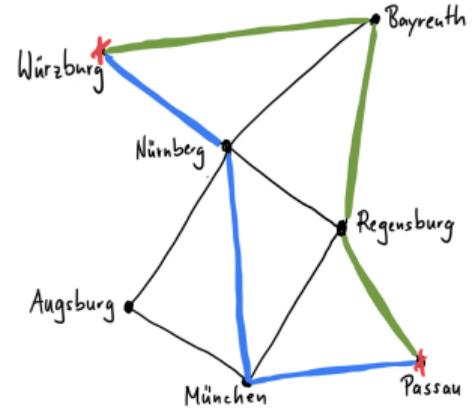


# Wie messe ich die Robustheit eines Netzwerks?

- ▶ Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten
- ▶ Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge

## Satz von Menger

Maximale Anzahl der disjunkten Wege zwischen zwei Punkten =  
Minimale Größe einer trennenden Kantenmenge



# Noch mehr Realität

In Realität:

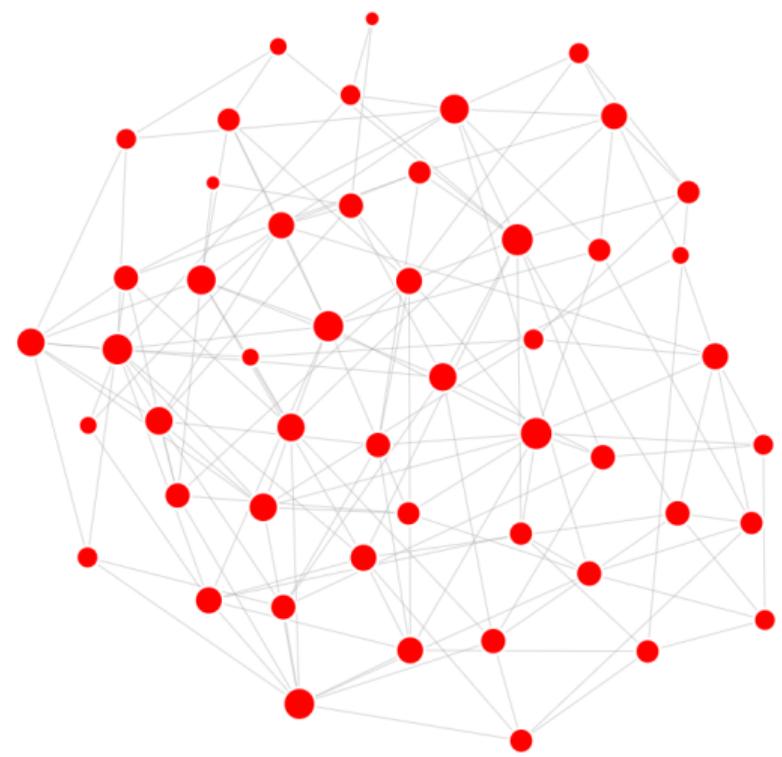
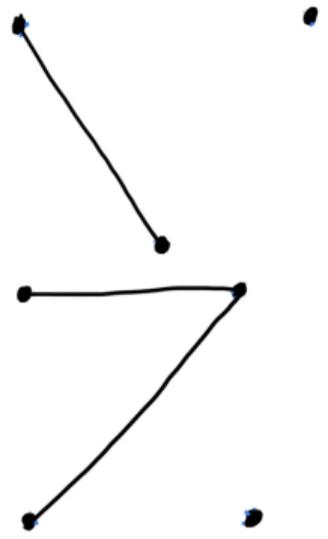
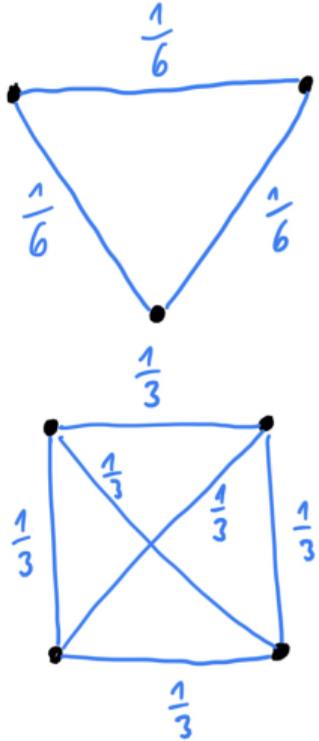
- ▶ Kosten auf den Kanten
- ▶ Kapazitäten auf den Kanten
- ▶ Kanten können nicht immer genutzt werden
- ▶ ...



Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

# Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

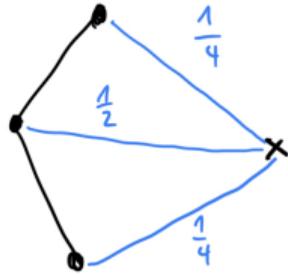
Erdős-Rényi-Gilbert-Modell: Jede Kante kommt mit einer festen Wahrscheinlichkeit vor.



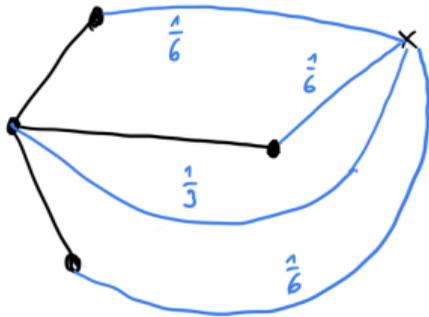
Beobachtung: Alle Knoten haben etwa gleich viele Nachbarn.

# Was ist ein soziales Netzwerk mathematisch?

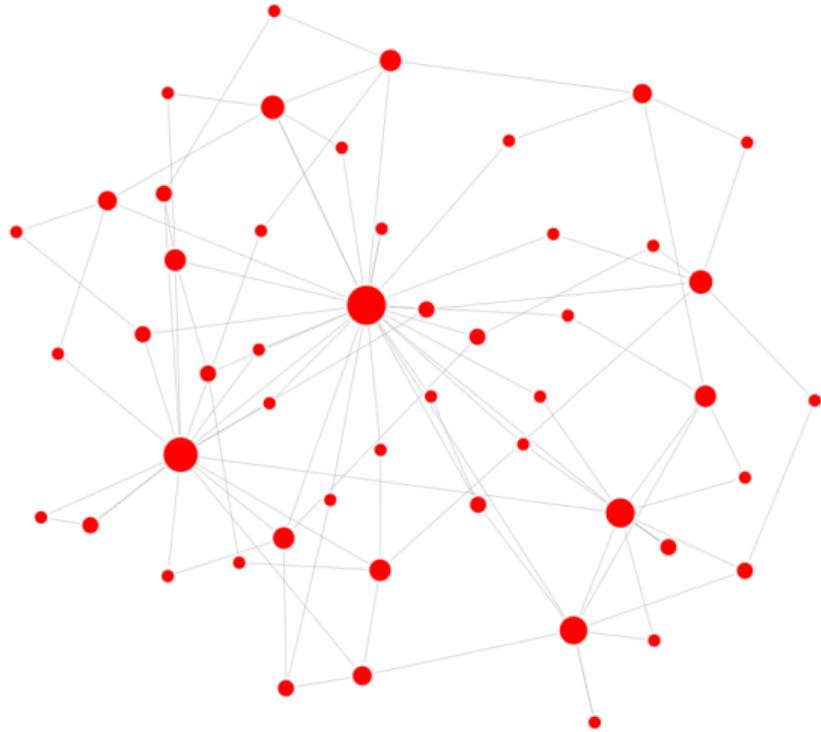
Barabási-Albert-Modell: Start mit "kleinem" Graph, dann jeweils neuer Knoten wird mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{k_i}{\sum_j k_j}$  mit Knoten  $i$  verbunden ( $k_i$  Anzahl der Nachbarn von  $i$ ).



$$4 = 1 + 2 + 1$$

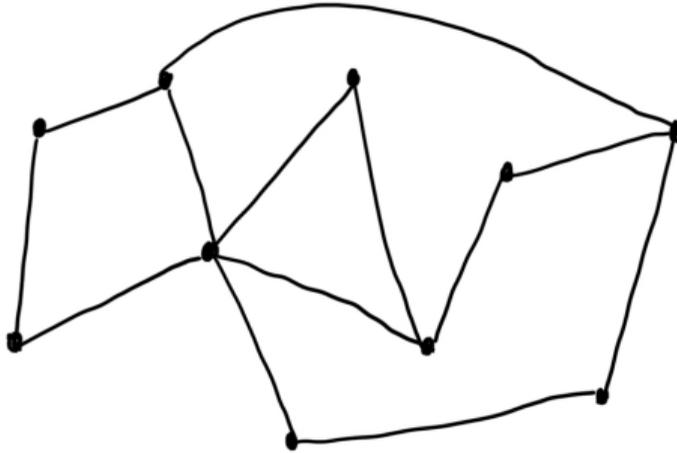


$$6 = 1 + 3 + 1 + 1$$



# Überzeugungsmodell

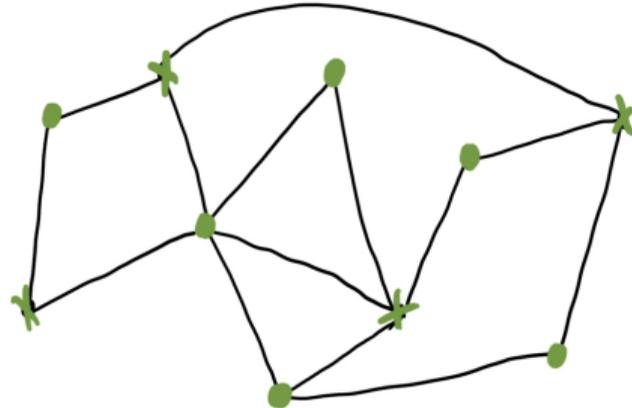
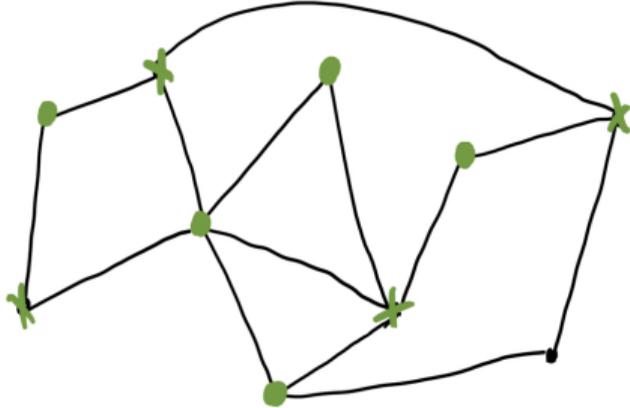
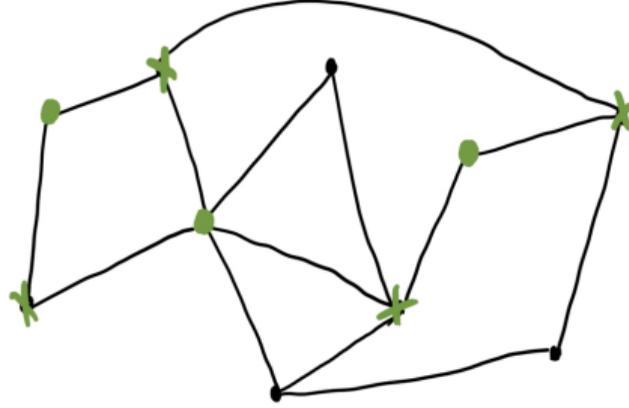
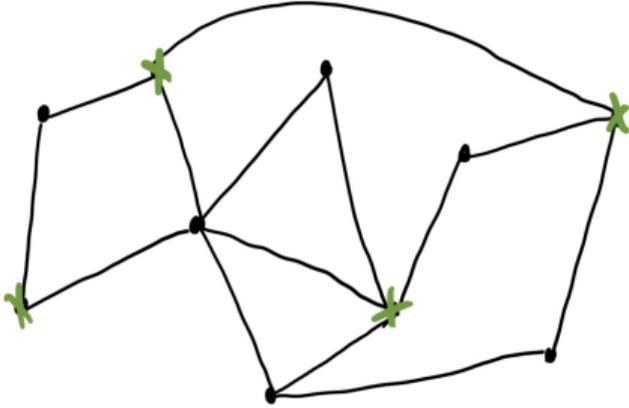
Gegeben (sozialer) Graph



Idee: Wenn  $\tau$  meiner Nachbarn überzeugt sind, dann werde auch ich überzeugt.

# Überzeugungsmodell

Für  $\tau = 2$

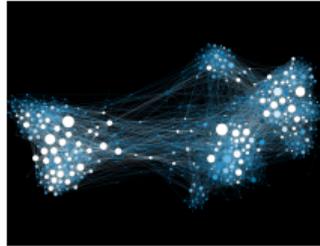


## Zusammenfassung und Ausblick

- ▶ Weiterführung des Modells: wie viele Individuen müssen überzeugt sein, um eine Mehrheit zu überzeugen?

# Zusammenfassung und Ausblick

- ▶ Weiterführung des Modells: wie viele Individuen müssen überzeugt sein, um eine Mehrheit zu überzeugen?
- ▶ Gesellschaftliche Herausforderungen mit Mathematik verstehen und lösen: robuste Logistik, soziale Strukturen, ...



- ▶ Mathematik nutzen für Nachhaltigkeit und Demokratie!