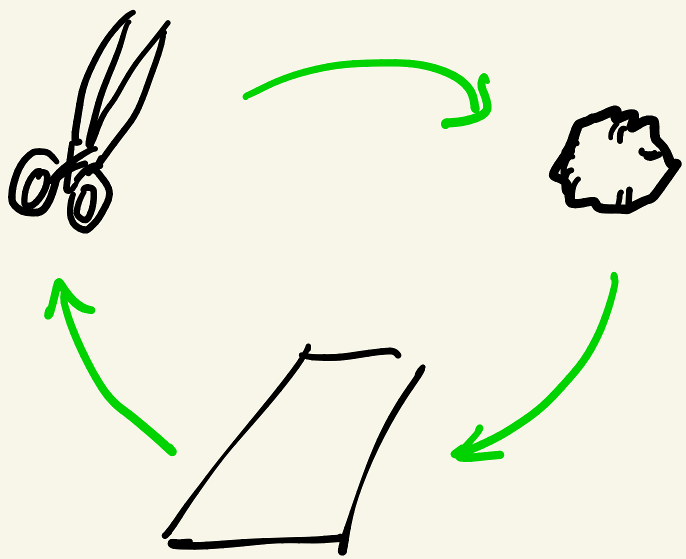
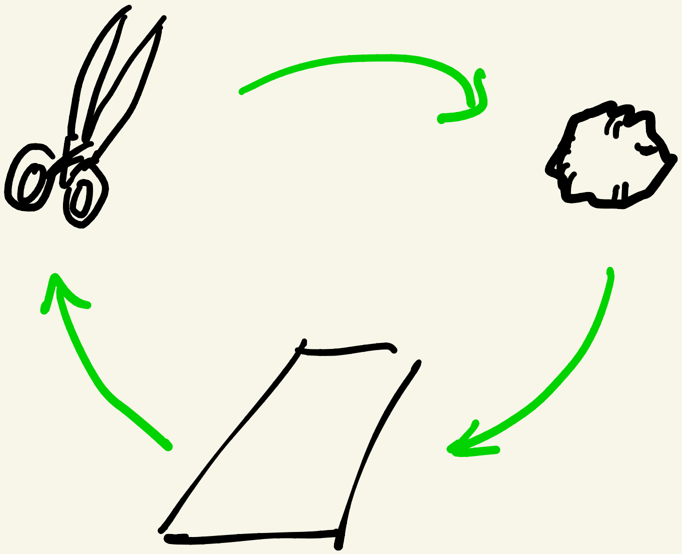
π Day 2024

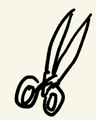
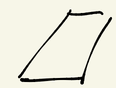
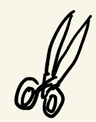
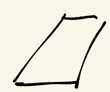
PLAYING WITH MATH

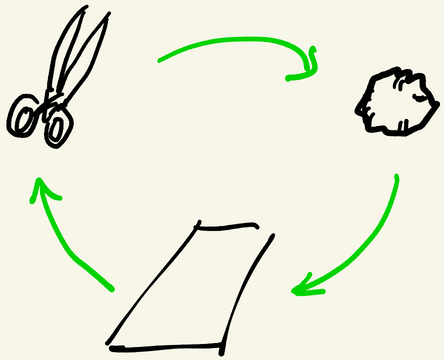
@KKG

Prof. Dr. Georg Loho (FU Berlin & U Twente)



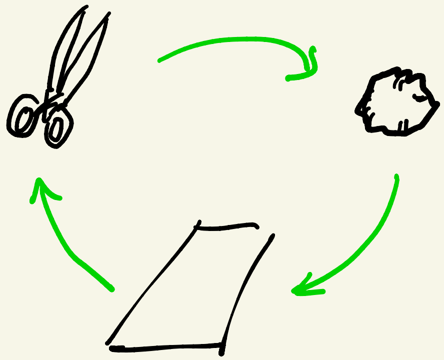


			
	0	-1	1
	1	0	-1
	-1	1	0



Aus Sicht der Zeilen

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} \text{Schere} & \text{Stein} & \text{Papier} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Schere} \\ \text{Stein} \\ \text{Papier} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



Auszahlungsmatrix

Aus Sicht der Zeilen

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \text{Schere} & \text{Stein} & \text{Papier} \\
\hline
\text{Schere} & 0 & -1 & 1 \\
\text{Stein} & 1 & 0 & -1 \\
\text{Papier} & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

WG-BAD DILEMMA

Klo putzen

...oder nicht

WG-BAD DILEMMA

 Klo putzen

 ...oder nicht

		
	0, 0	-2, 1
	1, -2	-9, -9

WG-BAD DILEMMA

Klo putzen

...oder nicht

$$
\begin{array}{rcc}
 & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\
\begin{array}{r} \text{kooperieren} \\[2em] \text{ausnutzen} \end{array} &
\multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 0,0 & -2,1 \\[2em] 1,-2 & -9,-9 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{kooperieren} \\ \\ \text{ausnutzen} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & -2,1 \\ \\ 1,-2 & -9,-9 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Bimatrix

"Feiglingsspiel"

Szenario:
zwei benachbarte
Agrarbetriebe

Belastung lokales Ökosystem durch Landwirtschaft

(Pestizide, Dünger, ...)

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{schonend} & \text{exzessiv} \\
\hline
\text{schonend} & & \\
\text{exzessiv} & &
\end{array}
$$

Ökosystem floriert

Marktnachteil gegenüber anderem Betrieb

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{schonend} & \text{exzessiv} \\
\hline
\text{schonend} & 3,3 & 1,4 \\
\text{exzessiv} & 4,1 & 2,2
\end{array}
$$

Beeinträchtigung des Ökosystems

ACHTUNG: Dies ist ein vereinfachtes Modell.

"Gefangenendilemma"

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{kooperieren} & \text{ausnutzen}\end{array} \\ \begin{array}{c}\text{kooperieren}\\[1em] \text{ausnutzen}\end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\ 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}\end{array}$$

Was ist eine gute Strategie?

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{kooperieren} \\[2em] \text{ausnutzen} \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\[2em] 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Was ist eine gute Strategie?

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\
\hline
\text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\
\text{ausnutzen} & 4,1 & 2,2
\end{array}
$$

Ausnutzen ist dominant für beide.

Was ist eine gute Strategie?

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc} \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{kooperieren} \\ \\ \text{ausnutzen} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} 3,\ 3 & 1,\ 4 \\ \\ 4,\ 1 & \boxed{2,\ 2} \end{array} \right)
\end{array}
$$

Nash-Gleichgewicht

Maximal in Zeile (2. Komponente) und Spalte (1. Komponente)

Nash-Gleichgewicht(e) und dominante Strategie(n) für

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\
\hline
\text{kooperieren} & 0,0 & -2,1 \\
\text{ausnutzen} & 1,-2 & -9,-9
\end{array}
$$

Szenario benachbarte Agrarbetriebe:

Entscheidung jede Saison aufs Neue

$$\begin{array}{c|cc} & \text{schonend} & \text{exzessive} \\ \hline \text{schonend} & 3,3 & 1,4 \\ \text{exzessive} & 4,1 & 2,2 \end{array}$$

„Iteriertes Gefangenendilemma“

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \begin{array}{c}\text{kooperieren}\\[2em] \text{ausnutzen}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\[1em] 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \begin{array}{c}\text{kooperieren}\\[2em] \text{ausnutzen}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\[1em] 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \begin{array}{c}\text{kooperieren}\\[2em] \text{ausnutzen}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\[1em] 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \begin{array}{c}\text{kooperieren}\\[2em] \text{ausnutzen}\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\[1em] 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

„Iteriertes Gefangenendilemma"

$$\begin{array}{c|cc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \hline \text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\ \text{ausnutzen} & 4,1 & 2,2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \hline \text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\ \text{ausnutzen} & 4,1 & 2,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \hline \text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\ \text{ausnutzen} & 4,1 & 2,2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \hline \text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\ \text{ausnutzen} & 4,1 & 2,2 \end{array}$$

Gesamtgewinn 1. Komponente: $3+4+3+2=12$

Gesamtgewinn 2. Komponente: $3+1+3+2=9$

Weiteres Beispiel

$$\begin{array}{c|cc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \hline \text{kooperieren} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{}} \\ \text{ausnutzen} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \text{kooperieren} & \left(\begin{matrix} 3,3 \\ 4,1 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 1,4 \\ 2,2 \end{matrix}\right) \\ \text{ausnutzen} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\ \text{kooperieren} & \left(\begin{matrix} 3,3 \\ 4,1 \end{matrix}\right. & \left.\begin{matrix} 1,4 \\ 2,2 \end{matrix}\right) \\ \text{ausnutzen} & & \end{array}$$

Zeilenspieler:in (1. Komponente) kooperiert nur.

ARBEITSANWEISUNG

Führt nun ein iteriertes Spiel mit dieser Matrix in 3er-Gruppen durch. →

$$\begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\ 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}$$

1. Legt zuerst individuell eine Strategie fest; dies kann vorherige Entscheidungen des Gegenüber mit berücksichtigen.
2. Spielt jeweils 1 gegen 1, die dritte Person schreibt mit.
3. Reflektiert, welche Strategie (im Verhältnis zu den anderen) gut war.

---

* 4. Wählt neue Strategien und wiederholt den Ablauf.

* 5. Verwendet die Matrix des Feiglingsspiels.

$$\begin{pmatrix} 0,0 & -2,1 \\ 1,-2 & -9,-9 \end{pmatrix}$$

Reflexion

Andere Sichtweise auf iterierte Variante

Anteiliges Vorkommen

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \\
\begin{array}{c} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\ 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Im Schnitt ?

Andere Sichtweise auf iterierte Variante

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\ 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Im Schnitt:

Gesamtgewinn 1. Komponente: $4 = 0\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 4\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 0$

Gesamtgewinn 2. Komponente: $1 = 0\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 0$

Andere Sichtweise auf iterierte Variante

$$\begin{array}{c|cc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{4} & 3,3 & 1,4 \\ \frac{3}{4} & 4,1 & 2,2 \end{array}$$

Im Schnitt

Gesamtgewinn 1. Komponente: $2\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$

Gesamtgewinn 2. Komponente: $2 = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$

Andere Sichtweise auf iterierte Variante

Gemischte Strategien

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{4} & 3,3 & 1,4 \\
\frac{3}{4} & 4,1 & 2,2
\end{array}
$$

Im Schnitt

Gesamtgewinn 1. Komponente: $2\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}$

Gesamtgewinn 2. Komponente: $2 = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot \frac{1}{2}$

ERINNERUNG: NASH-GLEICHGEWICHT

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{kooperieren} \\ \\ \text{ausnutzen} \end{array} & \begin{pmatrix} 3,3 & 1,4 \\ & \\ 4,1 & \boxed{2,2} \end{pmatrix} \end{array}$$

IDEE: Wahl von Zeile & Spalte ist die beste Antwort aufeinander.

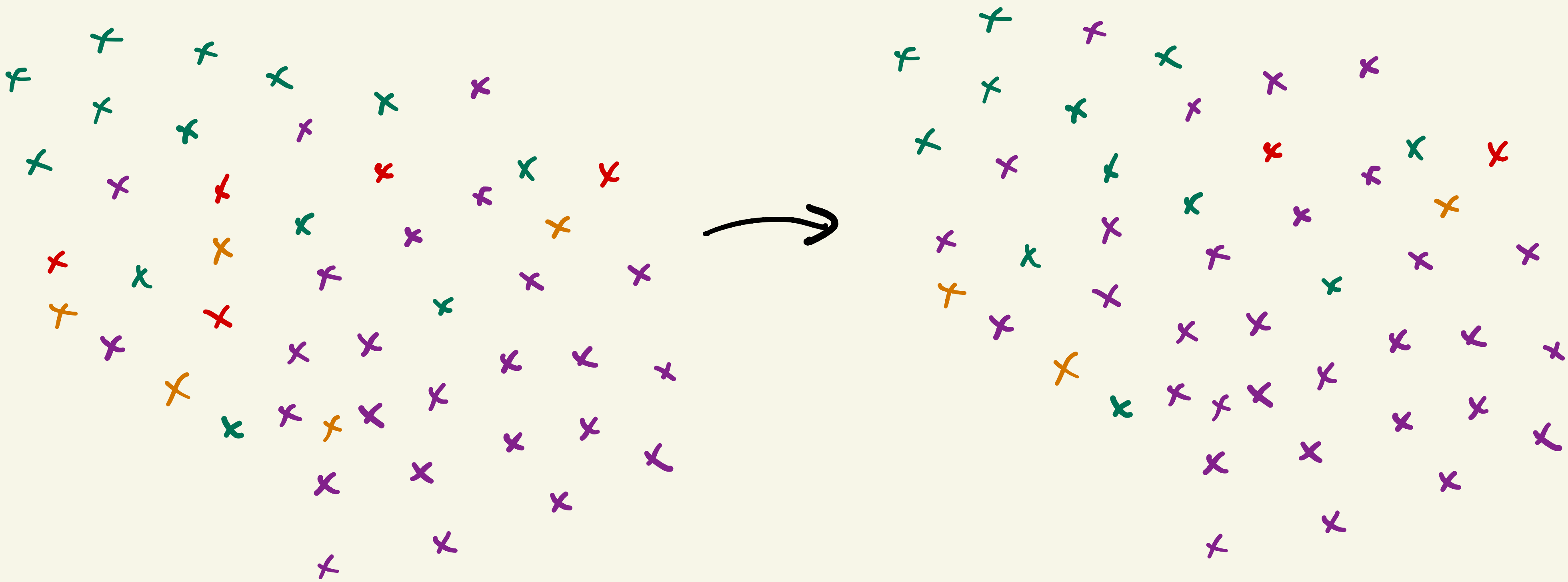
Theorem (NASH): Jedes Matrix-Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht.

$$
\begin{array}{c|cc}
 & \text{kooperieren} & \text{ausnutzen} \\
\hline
\text{kooperieren} & 3,3 & 1,4 \\
\text{ausnutzen} & 4,1 & \boxed{2,2}
\end{array}
$$

Strategien können dabei „gemischt“ sein.

Weitere Idee:

Evolutionäre Spieltheorie



- Entwicklung von Kooperation
- Durchsetzen bestimmter Strategien

Viele Fragen!

- Optimale Strategie für iteriertes Gefangenendilemma (kommt auf die Verteilung der Strategien an...)
- Mehrere Spieler:innen, mehr Optionen, ...
- Modellierung realer Situationen im Kontext von Politik, Nachhaltigkeit, ...